MATERIALS DE BIOLOGIA I GEOLOGIA

ELS ESTAMPATS. RECURS PER L´ESTUDI DE LA CRISTAL.LOGRAFIA.

Autor: CDEC

Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Direcció General
d'Ordenació Educativa
Centre de Documentació
i Experimentació de Ciències

Pg. de la Vall d'Hebron, 64-70
08023 BARCELONA
Tel. 417.68.75/417.67.70

Guix nº42 Abril 1.981

22 Nº 96

Experiències B.U.P.

Els Estampats

Recurs per l'Estudi de la Cristal·lografia

La cristal.lografia és una branca de ciència que a l'ensenyament hom deix a marginar degut al seu alt grau d'abstracció.

Els estampats ens poden ajudar a comprendre alguns conceptes com el de "nus reticular", "punts equivalents", "translació", "xarxa reticular"... que en els llibres de BUP i COU es representa de manera esquemàtica amb punts i línies. Els treballs proposats en aquest article són adequats per un 3er. de BUP o COU i pretenen facilitar aquesta comprensió.

El punt de partença el tenim amb la definició de cristall, subjecte de la cristal.lografia. Un cristall és un sòlid, format per ions, àtoms o bé molècules, el qual es repeteix indefinidament en les tres direccions de l'espai.

Com que treballar en tres dimensions és sempre una mica complicat, pel fet d'haver d'introduir la perspectiva en les representacions sobre el paper, partim d'una "llesca" de cristall, i en estadis successius s'hi pot afegir la tercera dimensió.

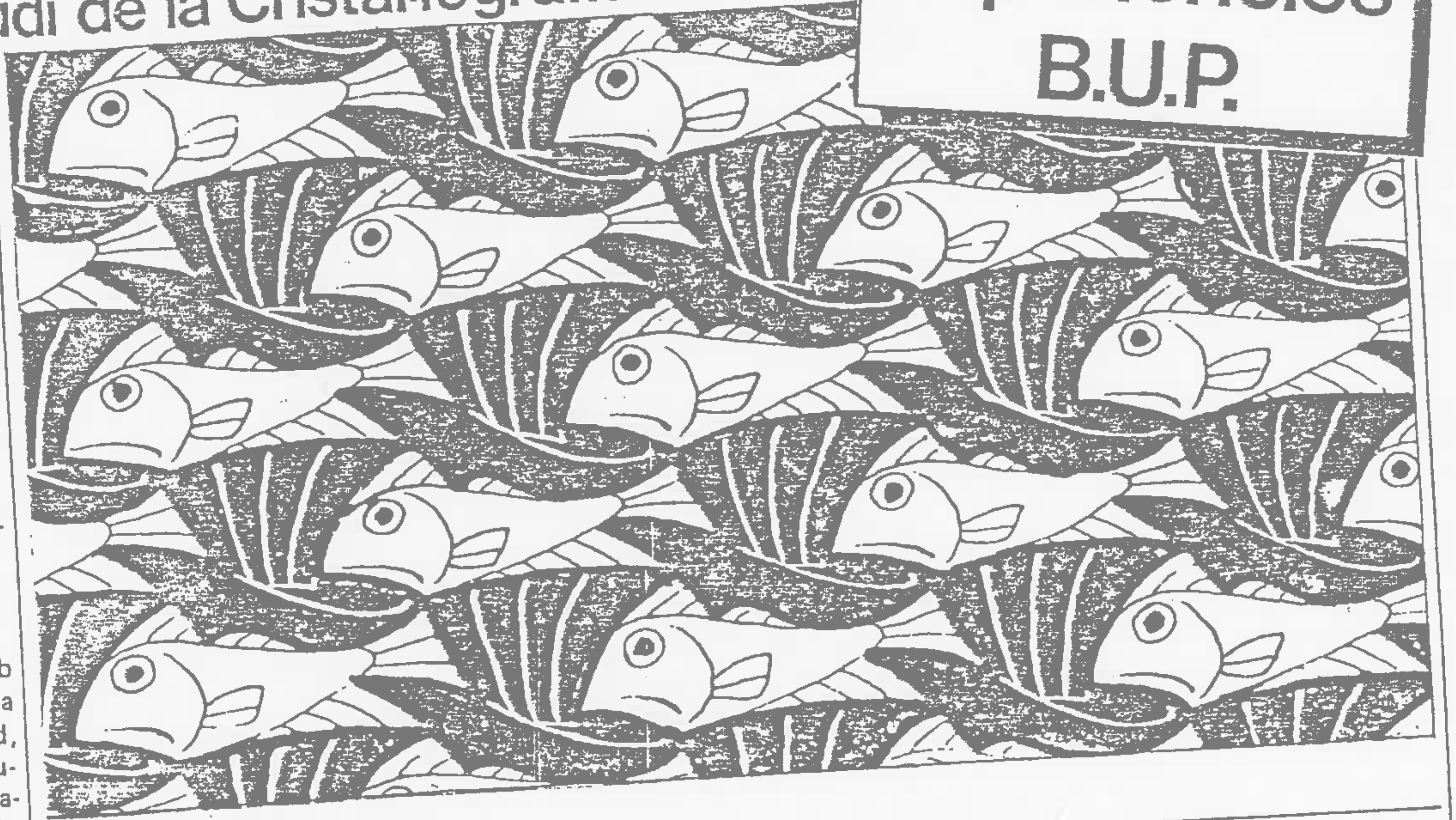


FIGURA 1

L'estampat de la Figura 1 està fet per un motiu, el qual consta de dos elements: un peix i un vaixell. La repetició d'aquest motiu ens omple totalment l'espai del pla del paper.

Aquesta distribució pot correspondre perfectament a la d'un cristall.

Agafem ara un punt qualsevol del motiu, per exemple la punta del morro del peix. Si jo marco amb un punt aquesta punta de morro, i totes les altres puntes iguals de l'estampat obtinc una sèrie de punts equivalents, que si els observem bé veurem que no

096 01

FIG. 2

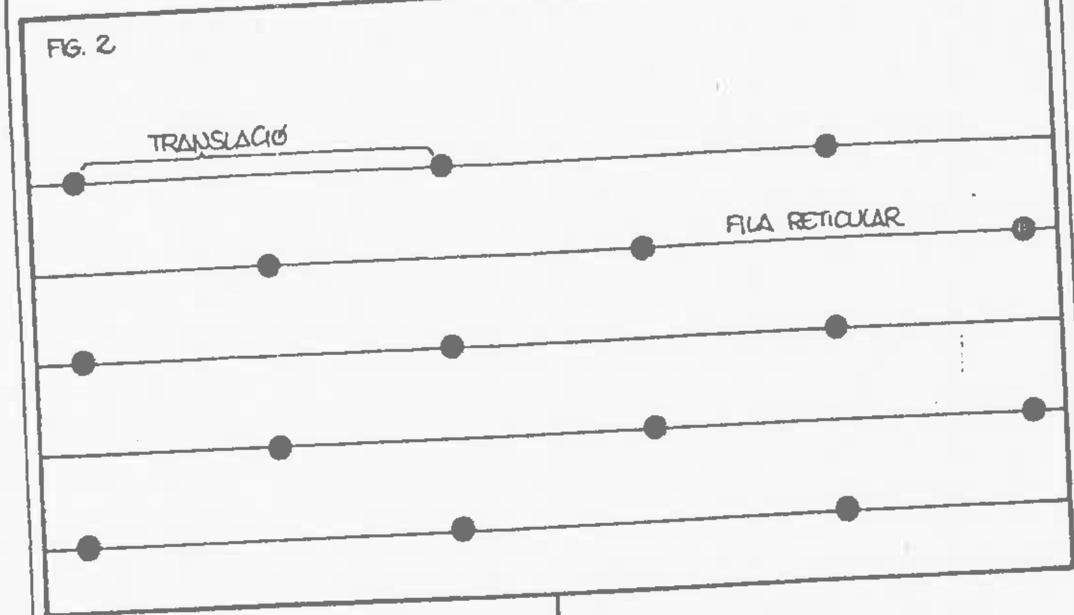


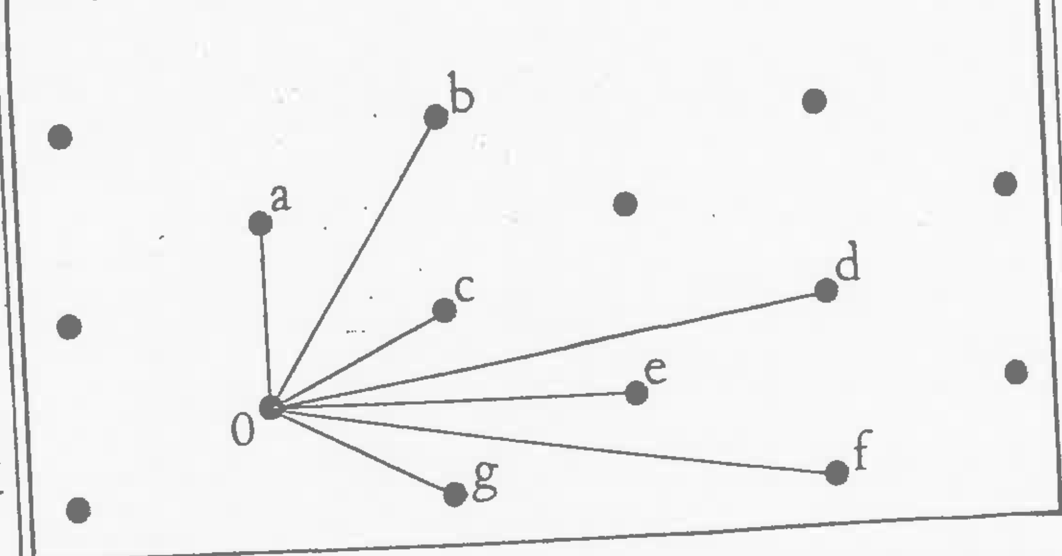
FIG. 3

estan distribuïts de qualsevol manera, sinó que estan **ordenats**, o sia que en una direcció determinada, els punts es repeteixen sempre a la mateixa distància. Aquest concepte és el que a cristal.lografia s'anomena **translació**.

(Vegeu la fig. núm. 2).

A aquesta direcció, en què la translació ve caracteritzada per una magnitud determinada és el que s'anomena **fila reticular**.

FIG. 4



Veiem que, com que podem un els punts de moltes maneres, obtir moltes files reticulars diferents, c dascuna d'elles amb una translac característica.

(Fig. núm. 3).

Un conjunt de dues o més files ticulars determina un **pla reticu** per tant, aquest no és més que conjunt de punts equivalents quals estan situats sobre d'un pla.

Per a caracteritzar els plans reticu-
ars només cal saber dues translaci-
ons, i aplicant aquestes sobre un punt
qualsevol del motiu, obtinc tot l'es-
tampat.

Si mirem ara la fig. núm. 4, veiem que a partir del punt que prenc com origen puc considerar diferents translacions. Les dues més curtes són les que caracteritzen el pla reticular. En aquest cas són de la mateixa magnitud OA, OC i OG, i puc agafar-ne dues qualsevols. Aquestes dues (he pres OA i OC) em formen una xarxa com la de la fig. núm. 5. Quan parlem de xarxes, els punts homòlegs o punts equivalents s'anomenen nusos.

Aquesta xarxa ve definida per la magnitud relativa de les dues translacions i l'angle que formen. En aquest cas:

$a = b$

$\omega = 60^o$

és una xarxa plana hexagonal

Notem ara que si en lloc de prendre el morro del peix, hagués agafat un altre punt qualsevol del motiu, com per exemple l'ull del peix o la proa del vaixell, ens haguessin sortit unes translacions i una xarxa idèntiques.

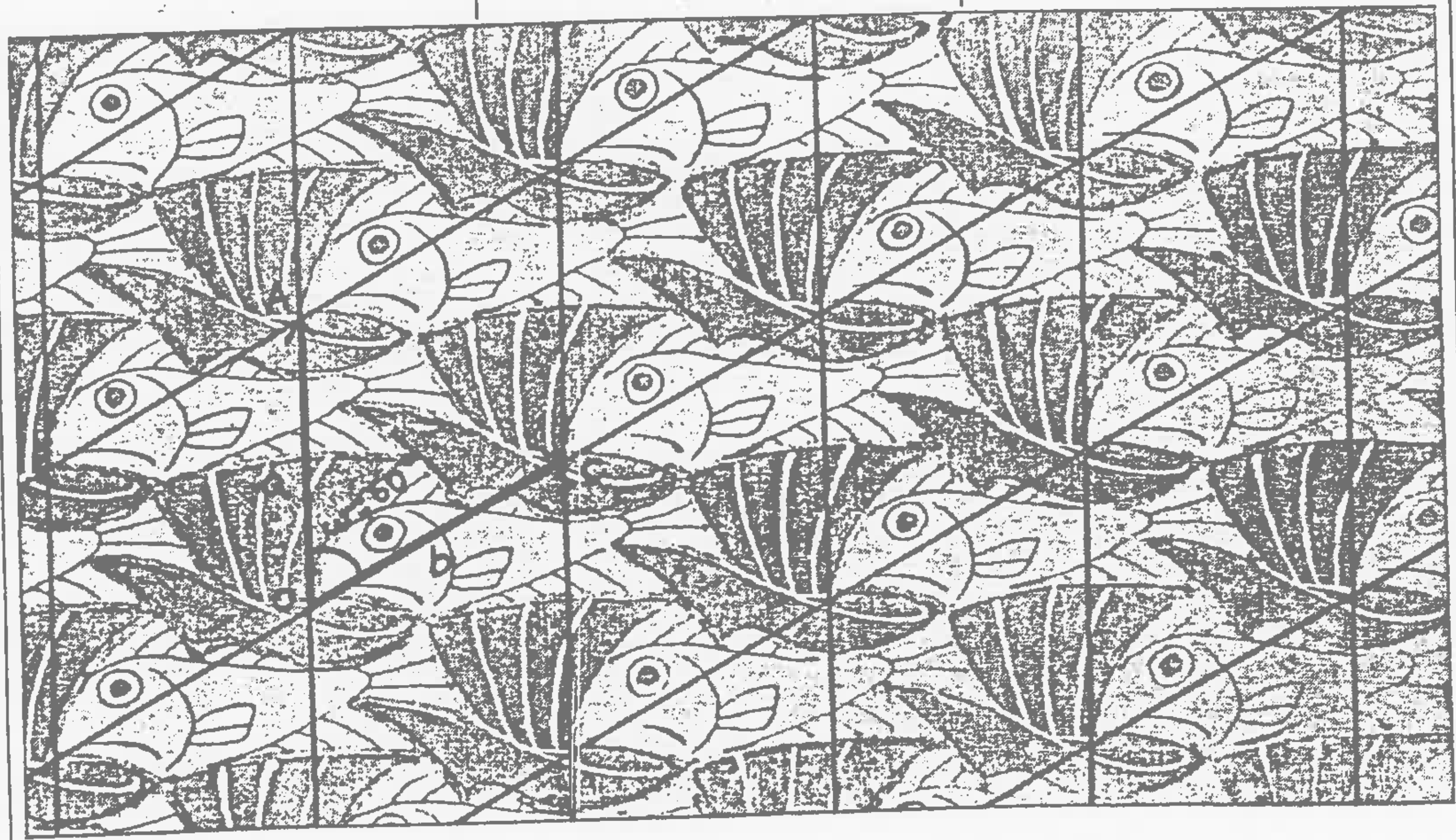


FIGURA 5

096 03

Mirem ara la fig. núm. 6 i intentem de fer el mateix que abans.

El motiu està format per dos homes blancs i dos homes negres, ja que no tots els homes blancs ni els negres tenen la mateixa orientació. Agafem, per exemple, la punta del nas de l'home blanc i busquem els homòlegs d'aquest. Veiem de seguida que les translacions més curtes ens delimiten una xarxa en la qual:

$$a \neq b$$
$$\omega = 90^{o}$$

és una xarxa plana rectangular

A la fig. núm. 7 la xarxa delimitada és:

$$a = b$$
$$\omega = 90^{o}$$

és una xarxa plana quadrada

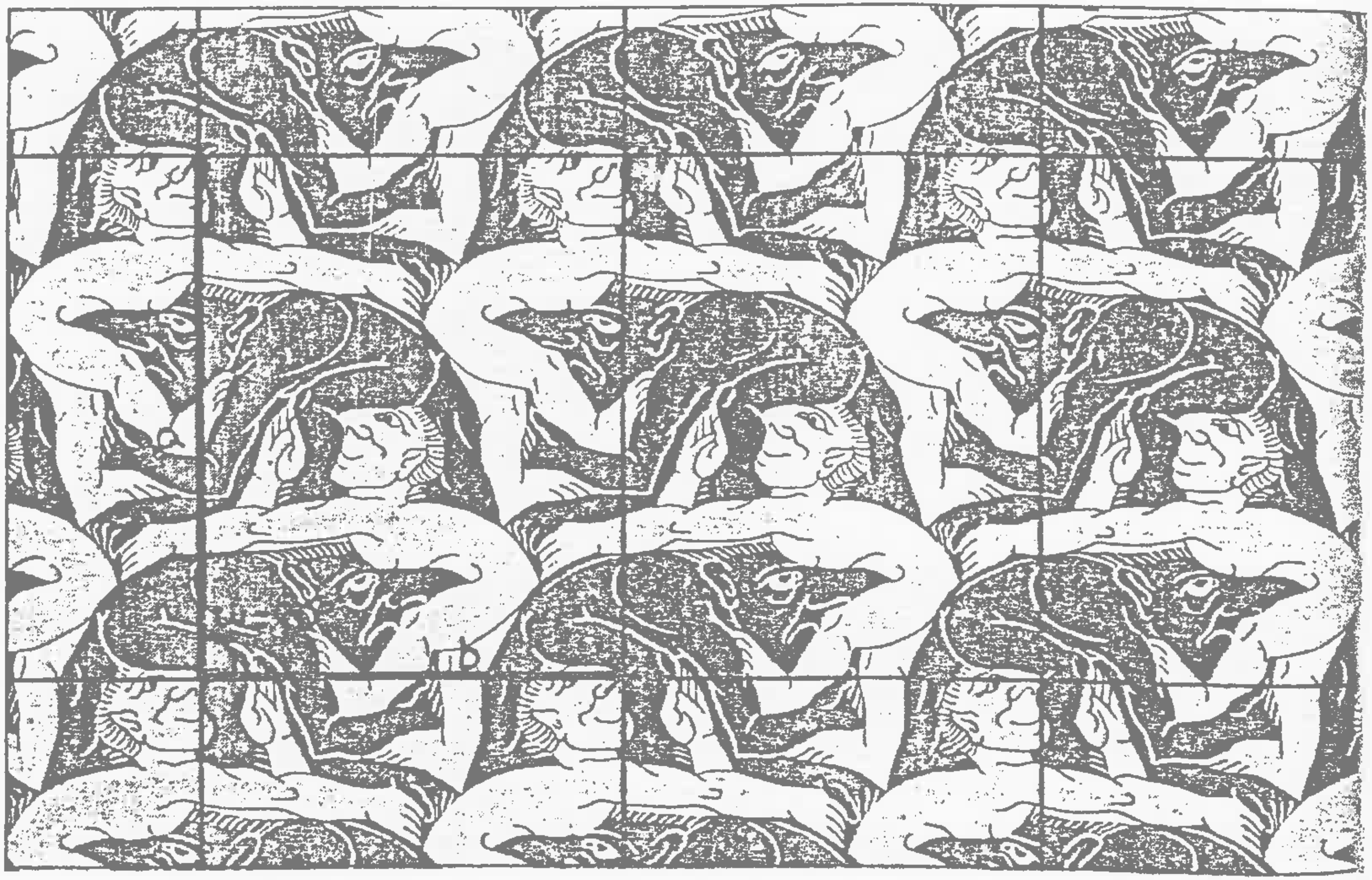


FIGURA 6

Hem vist ara uns casos concrets; generalitzant es pot dir que una xarxa plana o bidimensional ve definida per dos vectors, a, b els quals es caracteritzen pel seu mòdul i l'angle que formen entre ells. Jugant amb aquestes tres variables (els dos mòduls i l'angle) ens surten només cinc possibilitats:

a) Els dos mòduls són diferents:

1. $a \neq b$
$\omega = 90^{o}$
Xarxa plana rectangular

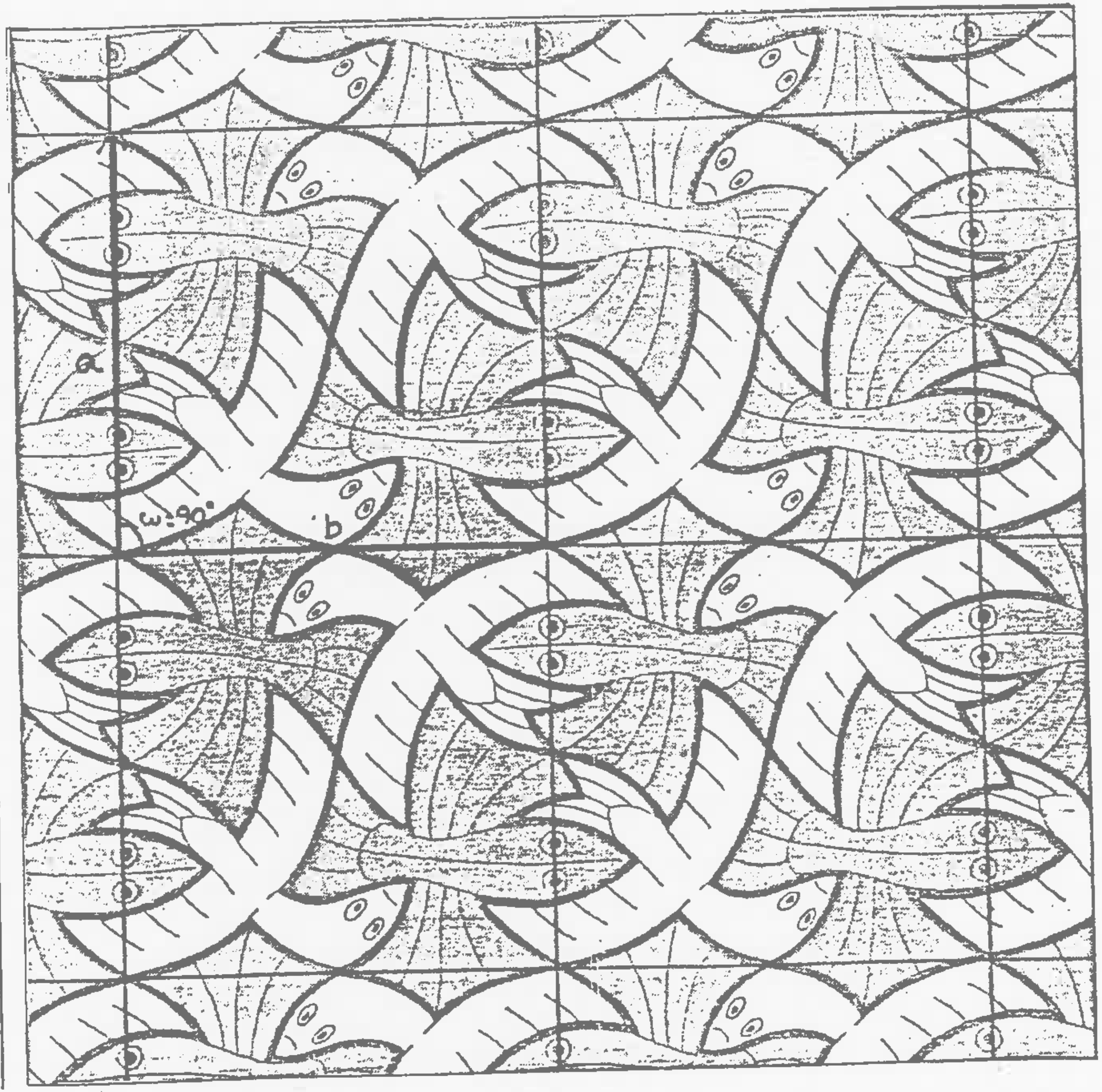
2. $a \neq b$
$\omega \neq 90^{o}$
Xarxa plana obliqua

b) Els dos mòduls són iguals:

3. $a = b$
$\omega \neq 90^{o}, 60^{o}, 120^{o}$
Xarxa plana ròmbica

4. $a = b$
$\omega = 60^{o}, 120^{o}$
Xarxa plana hexagonal

5. $a = b$
$\omega = 90^{o}$
Xarxa plana quadrada



Si ens preguntem per què tenim només aquests cinc tipus de xarxes planes, la resposta la trobarem amb les limitacions de simetria.

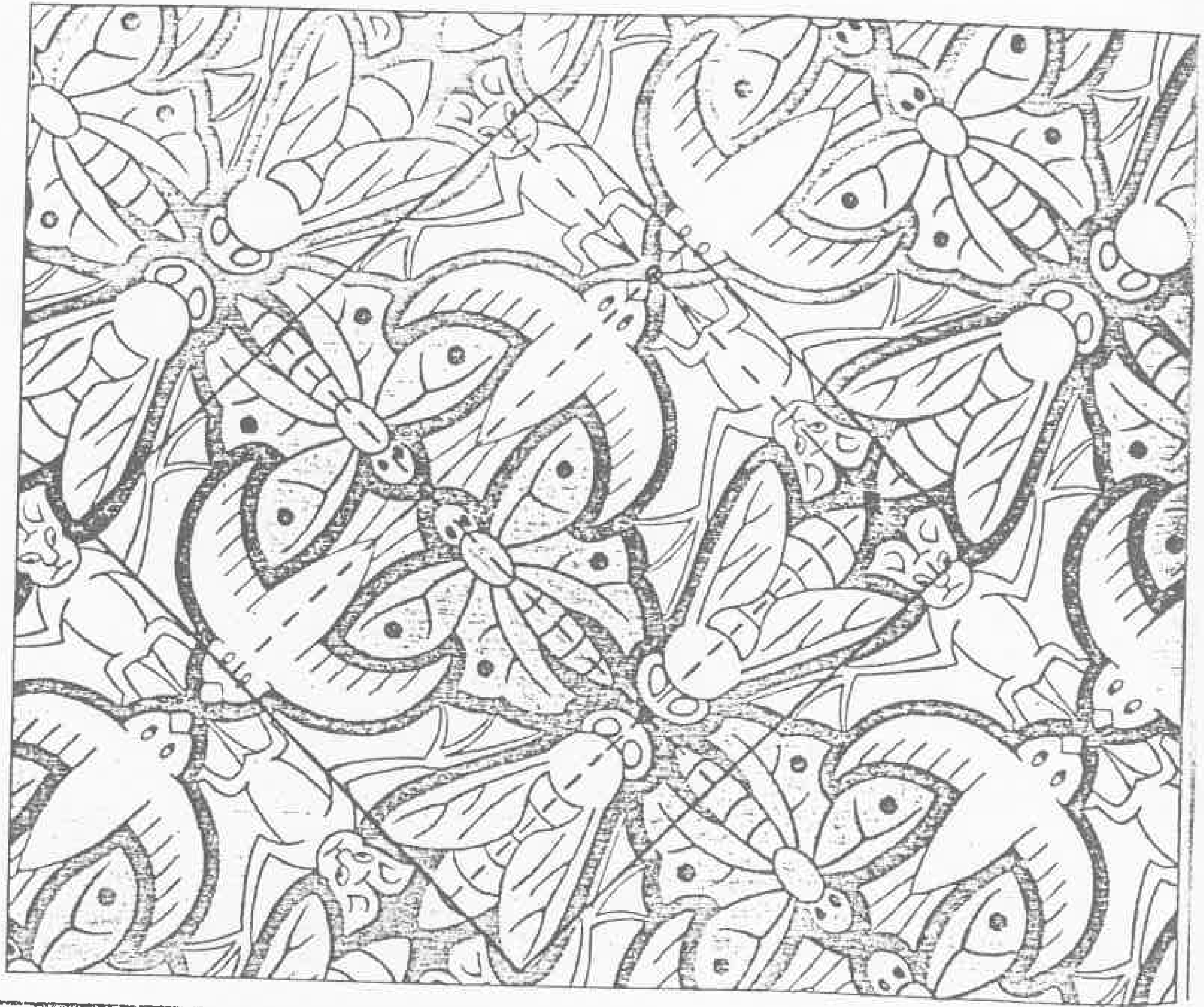
La matèria cristal.lina no és únicament periòdica (o sia feta de translacions) sinó que és també simètrica.

Observem la fig. núm. 8. Es veuenací diversos elements, que orientats de maneres diferents formen un motiu. La xarxa formada per les translacions és quadrada, i veiem que els elements repetits que queden al seu interior estan lligats per uns operadors de simetria. Les línies discontínues serien línies de reflexió, i les rodones punts, al voltant dels quals s'efectuen rotacions de 180º.

La simetria imposa, doncs, unes condicions a la distribució dels elements d'un motiu, que no fan possible cap altre tipus de xarxa plana.

Ara podríem continuar el procés i intentar d'introduir la tercera dimensió que li falta a la realitat del cristall.

Un mateix tipus de xarxa plana dóna lloc a diferents tipus de xarxes tridimensionals, segons la manera d'apilar-se; si els nusos coincideixen o no damunt la vertical dels anteriors, i segons la distància d'aquest apilament.



Bravais va calcular matemàticament els tipus de xarxes tridimensionals possibles i en va trobar 14, que es coneixen amb el seu nom.

Nota de l'autor:

Aquest treball s'ha centrat en la comprensió del concepte de translació, i s'ha deixat de banda el contingut simètric.

Per això, alguna de les xarxes deduïdes a partir dels estampats s'haurien de modificar, si intentéssim d'incorporar-hi els elements de simetria.

Bibliografia d'on es poden reproduir estampats:

- "Symmetry aspects of m.c. escher's periodic drawings" by Caroline H. Macgillavry. University of Amsterdam.
  Published for International Union of Crystallography.
  A. Oosthoek's Vitgerersmaatschappij N.V. Utrecht 1965.
- "La simetria" Hermann Weyl Princeton University Press.
  Ediciones de Promoción Cultural, S.A., 1975.
- "A first course in Crystallography" Alan Windle.
  First published in 1977 by G.Bell and Sons, Ltd. Edinburgh.

Teresa Correig i Blanchar

Coordinació secció: Isabel Giménez

096 0/

La simetria bidimensional: un camí per arribar al cristall

Teresa Mª Correig Blanchar
Joaquim Mª Nogués Carulla

1. Què és un cristall

Un cristall és una substància sòlida, que pot ésser natural o bé obtinguda artificialment al laboratori. Els cristalls presenten, però, unes característiques definides que les distingeixen de qualsevol altra substància sòlida; la més destacada a primera vista és la seva forma externa.

Els cristalls normalment constituïts presenten unes formes polièdriques amb cares planes. Això sol ja ens indica que el cristall, quan creix, no ho fa amb la mateixa velocitat en totes direccions (si no els cristalls serien sempre de forma esfèrica). Aquest comportament diferencial en funció de la direcció és el que en diem ANSOTROPIA i és característic del cristall.

Si seguim observant la forma polièdrica, veurem com les seves cares es repeteixen un determinat nombre de vegades, d'acord amb unes regles. Aquestes repeticions configuren el caràcter SIMÈTRIC del cristall.

Si ara agafem un cristall de bona exfoliació, per exemple un cristall de Na Cl (halita), que té forma cúbica, conforme es va exfoliant anem obtenint cada vegada cristalls més petits i de la mateixa forma. Això ens indica d'alguna manera una repetició o PERIODICITAT en l'estructura.

Finalment, en l'apartat anterior tots els cristalls de Na Cl presenten el mateix aspecte, no s'observen diferències entre ells a excepció del tamany; per tant, veiem com en la distribució dels elements que formen el cristall hi ha en primera instància una HOMOGENEÏTAT.

2. El cristall bidimensional

Agafem un dibuix repetitiu qualsevol (per exemple un paper d'embolicar regals o bé un paper per decorar parets); ens serà útil per introduir els conceptes bàsics del cristall. Fixem-nos en el dibuix reproduït a la figura número 1, i a primer cop d'ull veiem una sèrie d'elements que es van repetint. Els elements que es repeteixen són diversos i podem prendre qualsevol d'ells com a punt de referència.

Podem fer servir un paper vegetal sobreposat al dibuix, per tal de situar tots els símbols que ens convinguin. Si definim el punt A origen en l'extrem del bec de l'ocell amb cresta, allí hi situarem un cercle per indicar el punt de partença (punt A en la figura número 1). A continuació seguim avançant cap a la dreta, i el següent punt idèntic al primer és el B, i el marquem amb un segon cercle, el següent seria el punt C i així successivament. Aquests punts de referència A,B,C, etc., són punts ideals i els anomenem NUS RETICULAR.

Entre dos nusos reticulars consecutius, definim un vector, amb un sentit (cap a la dreta) i d'una determinada magnitud (al mòdul del vector). En aquesta direcció i sentit el VECTOR TRASLACIÓ ens origina una infinitat de nusos reticulars que configuren el que en diem una FILA RETICULAR.

Si repetim l'operació en el sentit de dalt a baix del dibuix, (figura número 1) obtindrem una segona fila reticular A,D,E, etc. Les dues files reticulars i les seves paral·leles corresponents configuren un PLA RETICULAR. Dins el pla reticular tenim una infinitat de nusos. Si ens fixem

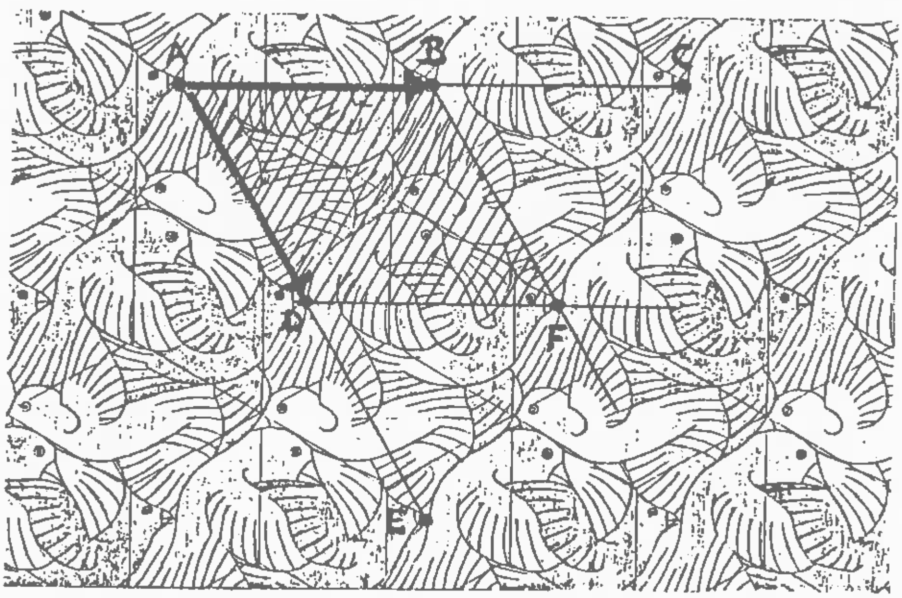


Figura 1

096 08

en la superfície delimitada pels quatre nusos reticulars A,B,D,F, veurem que té una determinada forma (rectangle, quadrat, rombe, etc.) i que està definida pels dos vectors traslació AB i AD, que en diem vectors de traslació fonamentals i són els més petits.

De l'àrea delimitada dins el polígon (ratllada en el dibuix) en diem CEL·LA FONAMENTAL i en aquest dibuix n'hi trobem una infinitat. Posades totes juntes encaixen perfectament en l'espai bidimensional i no deixen buits. Dins la zona ratllada de la cel·la fonamental, hi queda ratllada una part del dibuix: aquest serà el contingut de la cel·la fonamental (de dues dimensions en aquest cas).

Si tots aquests elements els hem anat dibuixant sobre el paper vegetal, ara en aixecar el paper vegetal separem tots els elements ideals del cristall (nus reticular, fila reticular, pla reticular i cel·la fonamental), del contingut real del cristall (el que hi ha dibuixat). D'aquesta manera podem veure la dualitat dels elements que formen el cristall, per una part els ideals o de referència, que els fem servir per estudiar i classificar els diversos tipus de cristall. Per l'altra, els elements reals dels cristalls, que en aquest cas és el dibuix en si mateix, en la realitat serien els àtoms, ions o bé molècules.

3. Els reticles bidimensionals o reticles plans

En el pla (definit per dues files reticulars) podem construir diferents cel·les fonamentals. Si ho fem, veurem com en realitat només en podem construir cinc, que seran sempre la combinació de dos vectors (que poden ésser iguals o diferents entre si), i de l'angle que formen aquests dos vectors.

A la figura número 2, hi tenim representades cinc possibilitats, la A és la cel·la obliqua, la B és la cel·la rectangular, la C, és la cel·la rectangular centrada, la D és la cel·la exagonal i finalment la E és la quadrada. Si de cadascuna d'aquestes cel·les en fem una repetició infinita, posant-les de costat i que encaixin, obtindrem en cada cas els reticles bidimensionals oblicus, rectangulars, hexagonals, etc.

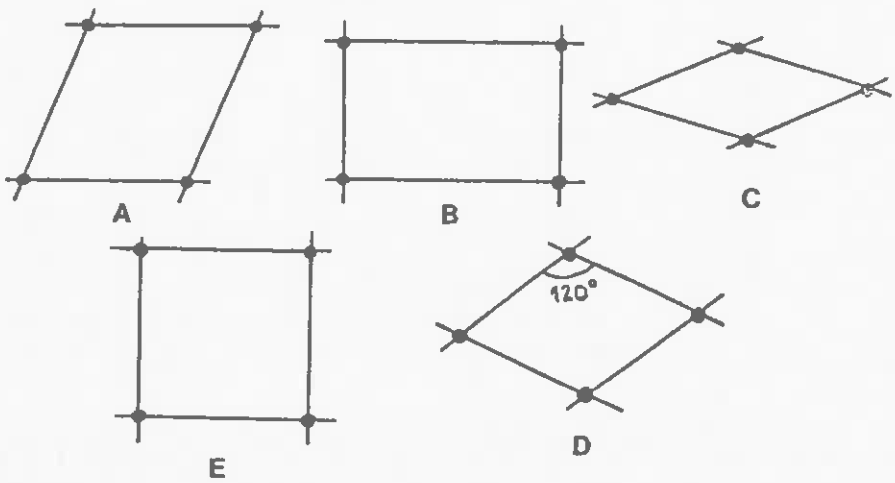


Figura 2

Només per la forma de les cel·les i la particular distribució dels nusos reticulars a l'espai, cadascuna d'aquestes cel·les posseeix una simetria determinada. Pensem que els nusos reticulars són només punts ideals de referència, per tant sense cap forma concreta; per això els representem com a esferes. Tinguem present, també, que abans, quan hem definit la cel·la fonamental del reticle a partir d'un dibuix (contingut del reticle), hem traçat sobre un paper vegetal els vectors que defineixen la cel·la, i en separar el paper vegetal del dibuix, ha quedat la cel·la buida.

Doncs bé, la simetria pròpia de la cel·la és la que té aquesta quan és buida, i ve definida només per la posició dels nusos reticulars d'una determinada manera. Així, per exemple, a la figura número 3, veiem dues cel·les, la A quadrada i la B rectangular, i els elements de simetria estan indicats amb els seus símbols corresponents.

En la cel·la A quadrada, els nusos estan situats en els vèrtexs del quadrat i estan relacionats per un eix de gir d'ordre quatre perpendicular al dibuix (cada punt està a igual distància de l'eix, i separats entre ells per girs consecutius de 90 graus). El mateix podem dir dels eixos binaris, que ens relacionen les posicions dels nusos dos a dos, i estan situats al mig dels costats. Finalment veiem els plans de simetria, que ens divideixen el quadrat per les diagonals i pel mig dels costats. Veiem com el nombre de plans és de quatre i es tallen al punt on hi ha l'eix quaternari. En els casos dels binaris, només hi ha dos plans: sempre tindrem tants plans com ordre indica l'eix.

Hem de tenir present que encara que al dibuix de la figura número 3 les cel·les estan aïllades, en la realitat formen part d'un conjunt de cel·les que es repeteixen a l'espai indefinidament i, per tant, a l'hora de determinar la simetria cal tenir en

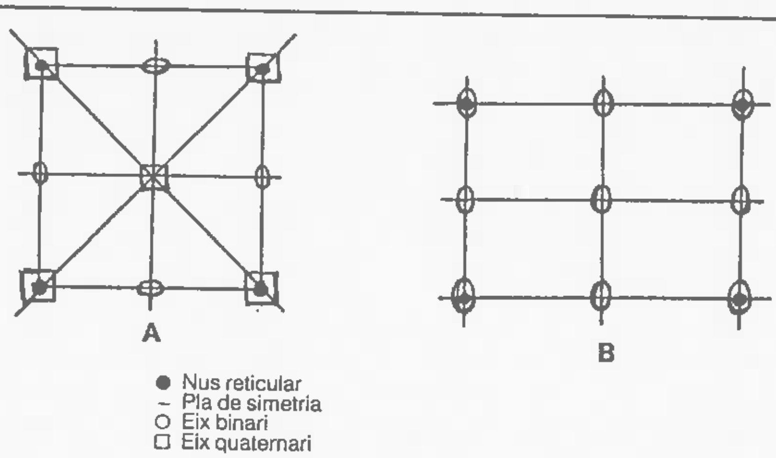


Figura 3

096 09

compte les cel·les veïnes. Amb això tenim la simetria de la cel·la buida.

Cal tenir present també la simetria del contingut de la cel·la que sempre ha de ser compatible amb la del reticle.

Si, finalment, ens fixem en la figura número 4, hi veiem una distribució particular d'un element (un triangle rectangle) que per si sol no té cap element de simetria, però repetit a l'espai d'una manera determinada ens origina una periodicitat i en conseqüència una determinada simetria. Al mateix temps podem veure la relació entre la SIMETRIA PUNTUAL (triangles al voltant d'un punt que és precisament un nus reticular) i la repetició d'aquesta situació en tot l'espai (en aquest cas espai bidimensional), que ens genera la cel·la rectangular. Veiem com tots i cadascun dels triangles situats al voltant del nus (els que estan encerclats), té el seu equivalent, per una traslació a l'interior de la cel·la rectangular i, amb això, passem de la simetria puntual a la SIMETRIA ESPACIAL, que es caracteritza bàsicament per l'aparició d'una nova operació de simetria: la traslació.

Un cop definida la cel·la fonamental, per la repetició infinita d'aquesta, obtenim el reticle, en el qual les cel·les encaixen entre si sense deixar buits. O dit d'una altra manera, quan construïm els reticles, estem veient totes les possibilitats d'omplir l'espai de la millor manera possible.

Seguint un raonament similar, però afegint la tercera dimensió, trobaríem els 14 reticles tridimensionals o de Bravais.

Suggeriments de tipus pràctic per treballar amb els alumnes

Indiquem una sèrie d'exercicis senzills que poden fer entendre a l'alumne els dos conceptes bàsics: CEL·LA FONAMENTAL i SIMETRIA ASSOCIADA.

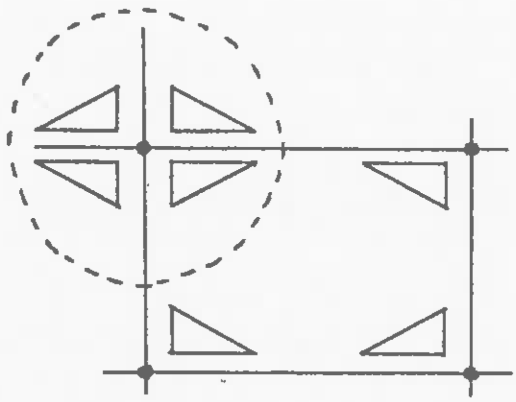


Figura 4

a) Escollir una sèrie de papers decoratius (tant els d'embolicar regals, com els de decorar les parets). En tots ells hi podrem establir el concepte de periodicitat i de cel·la fonamental. Fins i tot és possible que, en algun cas, hi trobem a més a més elements de simetria.

b) Agafar les set formes poliédriques, corresponents a les set cel·les fonamentals dels sistemes cristal·lins (el cub, el prisma tetragonal, el prisma hexagonal, el rombedre, etc.). Deduirem, en totes elles, els elements de simetria (plans de reflexió, centre i eixos de rotació). Això permet de fer l'enllaç del pla a l'espai.

c) Construir algunes cel·les senzilles amb boles de suro o porexpan i varetes de plàstic o filferro. Ho podem fer amb estructures senzilles com per exemple el Na Cl. Això permet de connectar els elements ideals del cristall, amb el contingut de cristall (els àtoms, ions o molècules).

d) Agafar les vint-i-vuit lletres de l'alfabet escrites en majúscula. Veure els elements de simetria de cada lletra, i després agrupar les lletres en funció dels elements de simetria comuns. Per exemple la lletra A, té un pla de simetria vertical, la lletra O, té dos plans de simetria a 90 graus, etc. Això permet explicar el fet que cristalls de formes diferents, tenen en comú uns mateixos elements de simetria, i que els podem agrupar en funció de la característica simètrica comuna.

e) Amb peces de diferents formes (quadrats, rectangles, rombes, hexàgons, etc.) Si en canvi agafem pentàgons regulars o bé octògons regulars necessitarem sempre dos tipus de peces per poder enrajolar el terra. (Això implicaria la barreja de dos tipus de reticle amb un mateix espai, el qual és inadmissible).

Aquestes exemples ens semblen suficients per fer comprendre a l'alumne la realitat del cristall. I trobem contraproduent, en canvi, qualsevol exercici que impliqui aprendre de memòria les classes cristal·lines.

BIBLIOGRAFIA

MacGILLAVRY, C.H. *Symmetry asoects of M.C. Escher's periodic drawings*, University of Asterdam, Published for International Union of Crystallography, Utrecht, 1965.

WEYL, Herman, *La simetria*, Princeton University Press, Ediciones de Promoción Cultural, S.A. Barcelona, 1975.

WINDLE, Alan, *A first course in Cristallography, Bell and Sons, Ltd.* Edinburgh, 1977.

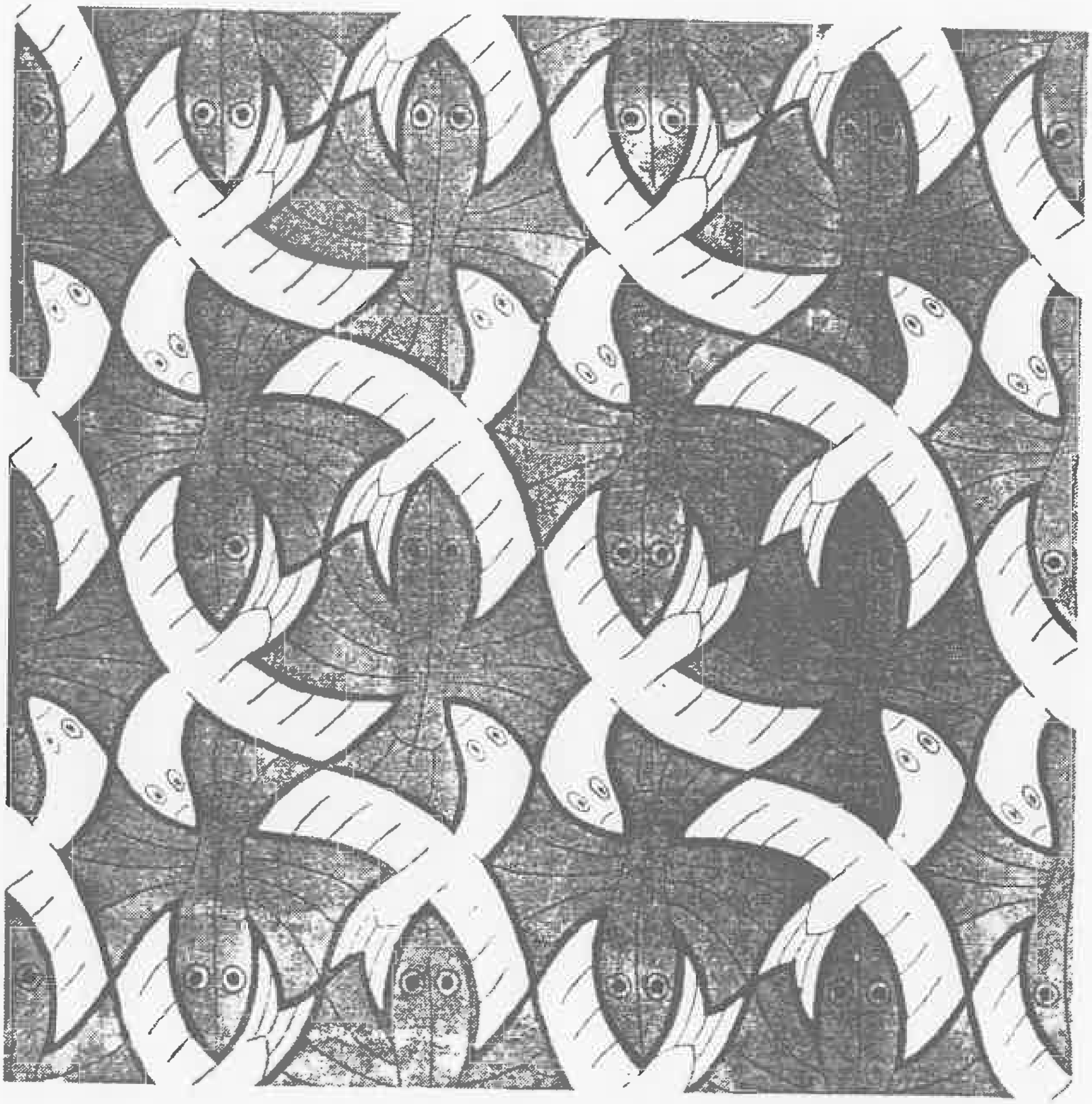
ERNST, Bruno, *Le miroir magique de M.C. Escher*, Medea Diffusion, S.A. Friburg (Suïssa), 1987.

GRUP ESPAIAL p1

a=b

$\omega = 60^{\circ}$

Xarxa plana hexagonal

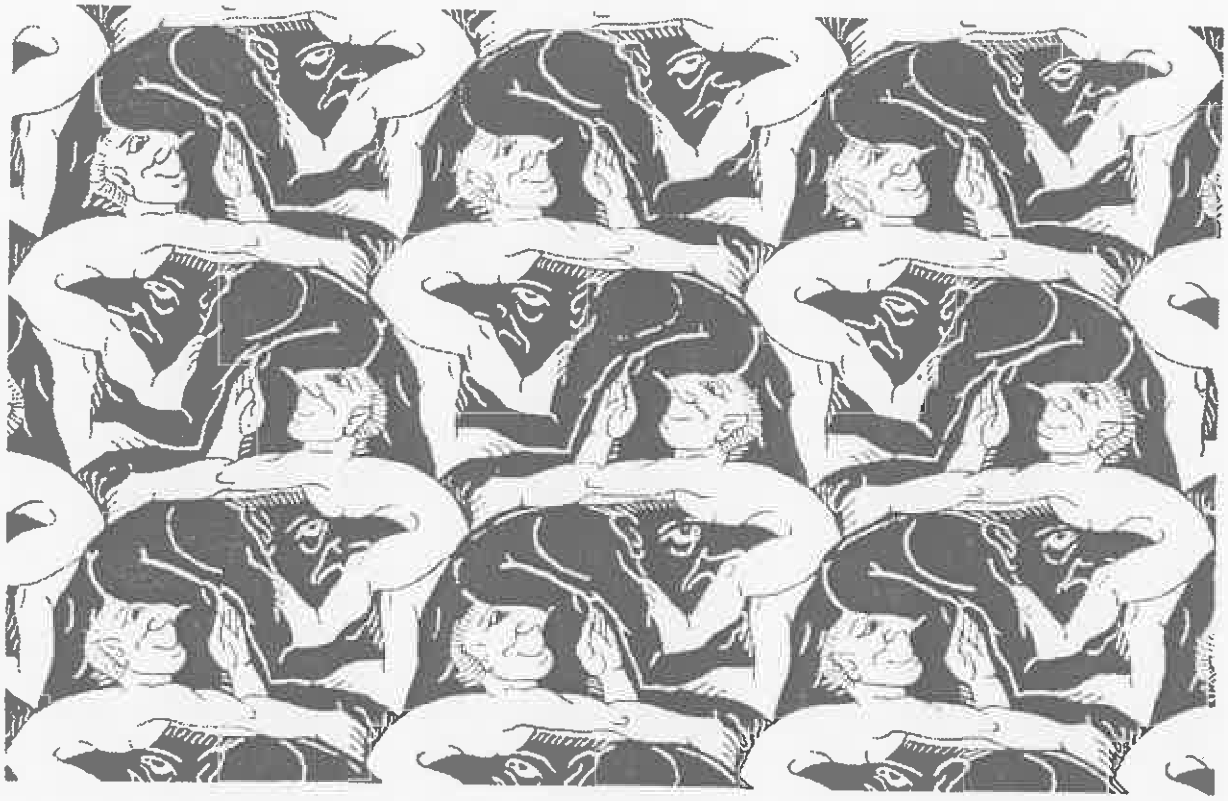


GRUP ESPAIAL p2

a=b

$\omega = 90º$

Xarxa plana quadrada

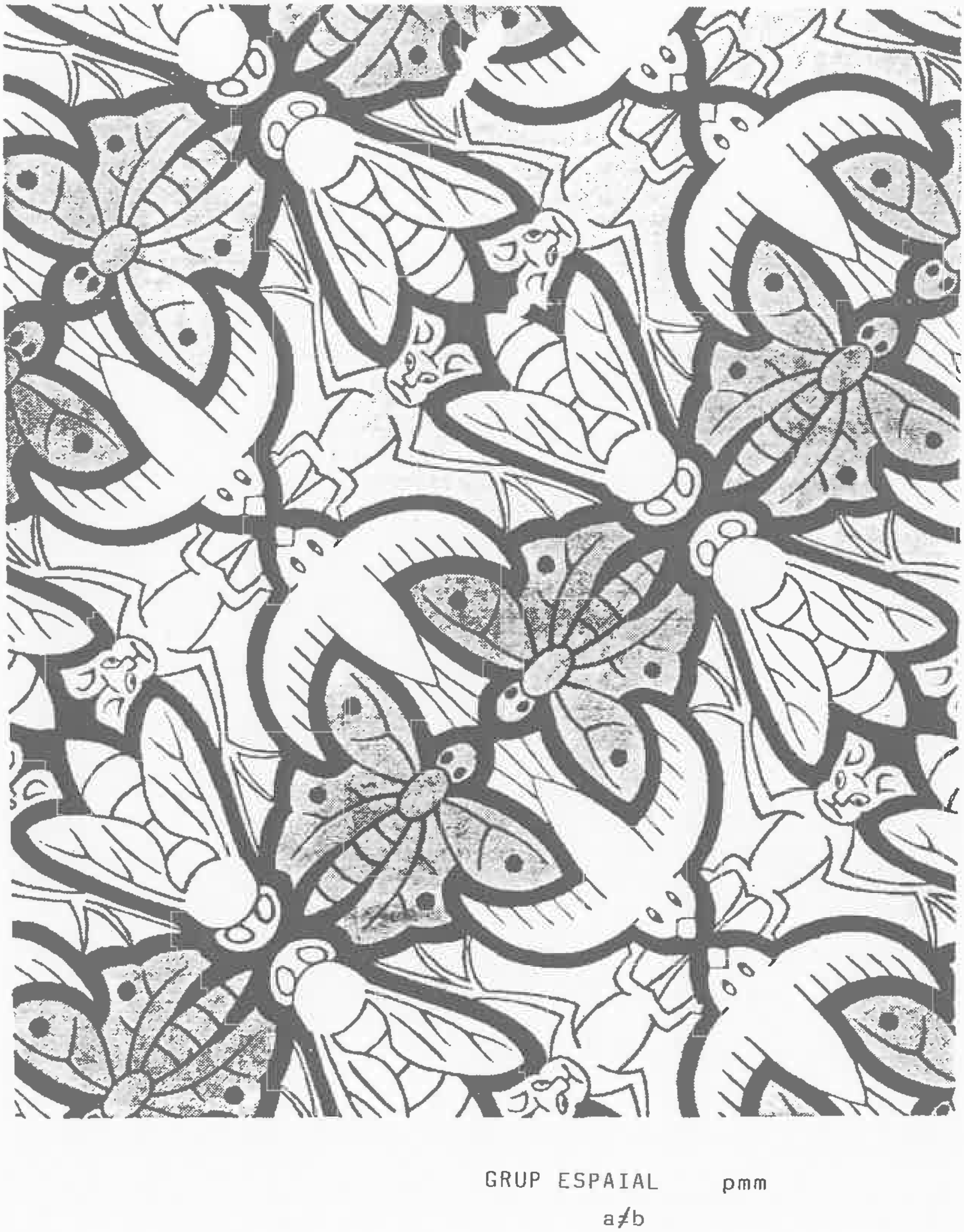


GRUP ESPAIAL pg

$a \neq b$

$\omega = 90º$

19

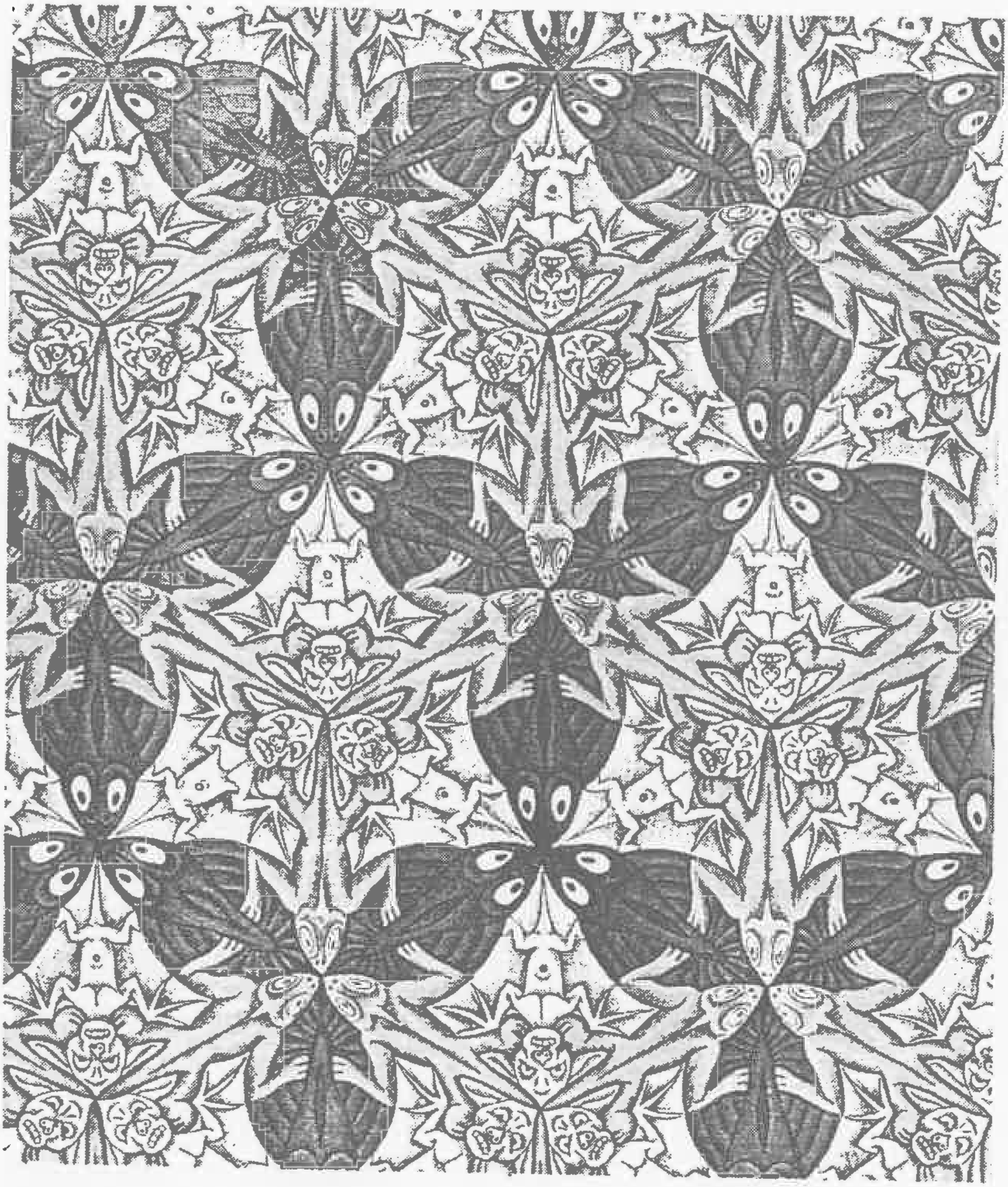


GRUP ESPAIAL pmm

$a \neq b$

$\omega = 90^{\circ}$

20



GRUP ESPAIAL p3m1

25

GRUP ESPAIAL p4

37

GRUP ESPAIAL p6 ó p2

segons la forma o color i forma.